一、基本概念

△ 线性方程 $L[u]=f$ $\Rightarrow$ 叠加原理 $L[u_1]=f_1$，$L[u_2]=f_2$，$L[c_1u_1+c_2u_2]=c_1f_1+c_2f_2$

u及其导数的线性组合　　自由项（只依赖独立变量）

△ 齐次方程 $L[u]\equiv 0$ $\Rightarrow$ 叠加原理：若 $L[u_1]=0$ $L[u_2]=0$，则 $c_1u_1+c_2u_2$ 是 $L[u]=0$ 的解。

无穷叠加原理一般不成立，因为 $\sum_{1}^{\infty} C_n u_n$ 不一定收敛。

通解：偏微分方程所有解的集合。

定解问题：偏微分方程 + 定解条件（初、边值条件）。

适定性：解存在性 + 解唯一性 + 解稳定性。

二、三大典型偏微分方程

1. $Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu=G$、常系数一般二阶偏微

令 $\begin{cases}\xi=\xi(x,y)\\ \eta=\eta(x,y)\end{cases}$，则 $J=\begin{vmatrix}\xi_x & \xi_y\\ \eta_x & \eta_y\end{vmatrix}$　非线性变换。

$\therefore u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x$，$u_y=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y$.

$\therefore u_{xx}=u_{\xi\xi}\xi_x^2+2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+u_{\eta\eta}\eta_x^2+u_\xi\xi_{xx}+u_\eta\eta_{xx}$

$u_{yy}=u_{\xi\xi}\xi_y^2+2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+u_{\eta\eta}\eta_y^2+u_\xi\xi_{yy}+u_\eta\eta_{yy}$

$u_{xy}=u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y+u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y+u_\xi\xi_{xy}+u_\eta\eta_{xy}$.

代回原一般方程，得 $A_1u_{\xi\xi}+B_1u_{\xi\eta}+C_1u_{\eta\eta}+D_1u_\xi+E_1u_\eta+F_1u=G_1$.

其中 $A_1=A\xi_x^2+B\xi_x\xi_y+C\xi_y^2$

$B_1=2A\xi_x\eta_x+B(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+2C\xi_y\eta_y$

$C_1=A\eta_x^2+B\eta_x\eta_y+C\eta_y^2$

$D_1=A\xi_{xx}+B\xi_{xy}+C\xi_{yy}+D\xi_x+E\xi_y$.

$E_1=A\eta_{xx}+B\eta_{xy}+C\eta_{yy}+D\eta_x+E\eta_y$.

$F_1=F$　$G_1=G$.

因有 $B_1^2-4A_1C_1=J^2(B^2-4AC)$.

设 $A_1=C_1\equiv 0$，用 ζ 代表 ξ 和 η，则 $A\zeta_x^2+B\zeta_x\zeta_y+C\zeta_y^2\equiv 0$. 沿着曲线 $\zeta=$ 常数

有 $d\zeta=\zeta_x dx+\zeta_y dy=0$　$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{\zeta_x}{\zeta_y}$. 代入上式，得.

$$Ay_x^2-By_x+C=0$$

$\therefore y_x=(B\pm\sqrt{B^2-4AC})/2A$. 此即特征方程，积之得积分曲线.

积分曲线：$y=[(B\pm\sqrt{B^2-4AC})/2A]x+\text{const}$. 满足 u 在此两曲线族

上（新坐标系 $\xi-\eta$ 上）有 $B_1u_{\xi\eta}+D_1u_\xi+E_1u_\eta+F_1u=G_1$.

∴ $\xi = y-[(B+\sqrt{B^2-4AC})/2A]x$.

$\eta = y-[(B-\sqrt{B^2-4AC})/2A]x$.

是新坐标系的两个坐标轴在x-y坐标系中的方程.

一般思路:

① 方程 $Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu=G$.

② 特征方程: $y_x=(B\pm\sqrt{B^2-4AC})/2A$

③ 积分曲线: 若A、B、…F、G是常系数, 则积上方程得 $y=[(B\pm\sqrt{B^2-4AC})/2A]x+\text{const}$

得新坐标系 $\xi=y-[(B+\sqrt{B^2-4AC})/2A]x$, $\eta=y-[(B-\sqrt{B^2-4AC})/2A]x$

在新坐标系下 方程不会出现 $u_{\xi\xi}$ 和 $u_{\eta\eta}$ 项.

若A、B、… F、G是变系数, 亦可对特征方程积分得二曲线族.

双曲型: 两族实特征线.

抛物型: 一族二重实特征线, 一般容易定一条与此特征曲线无关的η来化简方程.

椭圆型: 虚特征线.

2. 一阶线性偏微的特征线法.

$a(x,y)u_x+b(x,y)u_y=f(x,y)$. $u(x,0)=\varphi(x)$ 侧边条件.

可写成 $(u_x,u_y)\cdot(a(x,y),b(x,y))=f(x,y)$, 即 $\nabla u\cdot(a(x,y),b(x,y))=f(x,y)$

即 u在 $(a(x,y),b(x,y))$ 方向上的方向导数为 $f(x,y)$.

该方向可表示为 $\frac{dy}{dx}=\frac{b(x,y)}{a(x,y)}$, 设该特征线上的微元为 ds. $s(x,y)=s(x_0,y_0)$.

∴ $\nabla u\,(a(x,y),b(x,y))=\frac{du}{ds}=f(x,y)$, $\frac{du}{ds}=\frac{dx}{ds}u_x+\frac{dy}{ds}u_y$ ∴ $\frac{dx}{ds}=a(x,y)$, $\frac{dy}{ds}=b(x,y)$.

∴ $u=\int_{s_0} f(x(s),y(s))ds+\varphi(x|_{y=0})$.

eg. $\begin{cases} au_x+bu_y=f(x,y) \\ u(x,0)=\varphi(x) \end{cases}$

∵ $\frac{dy}{dx}=\frac{b}{a}$. 特征方程 $y=\frac{b}{a}x+C$. ~~…~~ $y=y_0+bs$, $x=x_0+as$.

∴ $\frac{du}{ds}=f(x,y)$. $u=\int_{(x,0)}^{(x,y)} f(x,y)ds+u(x,0)$. ∵ $y=0$时, $s=-\frac{y_0}{b}$, $x=x_0-\frac{a}{b}y_0$

∴ $u=\int_{-\frac{y_0}{b}}^{0} f(x,y)ds+\varphi(x_0-\frac{a}{b}y_0)$. x_0、y_0换成一般的x,y即得解.

当然, 应用变量替换法亦易解一阶线性偏微分. 一般思路:

① 方程: $au_x+bu_y=f$, ② 特征方程: $y_x=\frac{b}{a}$, ③ 积分曲线: $y=\frac{b}{a}x+C$ 在此线上u的导数为f, 令 $s=y-\frac{b}{a}x$, 则 $\frac{du}{ds}=f$ 即可解(通过初边条件).

3. 1维波动方程的 d'Alembert公式.

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} & -\infty<x<\infty, t>0 \\ u(x,0)=\varphi(x) & -\infty<x<\infty \\ u_t(x,0)=\psi(x) & -\infty<x<\infty. \end{cases}$$

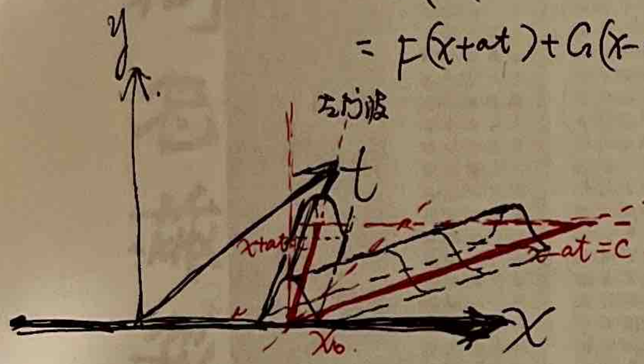
利用偏导数法、利用积分变换法（Fourier x, Laplace t）、分离变量法.

利用待定函数的特征线法：$x\pm at\equiv C$. $\xi=x+at, \eta=x-at$.

解得. $u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz+\frac12[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]$.

$=\frac12[\varphi(x+at)+\frac1a\int_{x_0}^{x+at}\psi(z)dz]+\frac12[\varphi(x-at)-\frac1a\int_{x_0}^{x-at}\psi(z)dz]$

$=F(x+at)+G(x-at)$. 左行波+右行波. 波速为a.



解的性质：

依赖区间：$[x-at, x+at]$.

决定区域：$x+at=x_2 > x-at=x_1$ 所围区域

影响区域：$x+at=x_1 < x-at=x_2$ 所围区域

可用平行四边形法则求决定区域外的解.

半无界区间的振动问题 eg

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}. & 0<x<\infty, t>0. \\ u(0,t)=0. & t>0. \\ u(x,0)=\varphi(x), & u_t(x,0)=\psi(x). \end{cases}$$

有界弦的振动问题 eg

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} & 0<x<L, t>0 \\ u(0,t)=0, u_x(L,t)=0. & t>0. \\ u(x,0)=\varphi(x), u_t(x,0)=0, & 0\le x\le L. \end{cases}$$

自由端 $u_x(L,t)=0$ 上，为保证全时间 $(t>0)$ $u_x(L)=0$，应以此为轴对初始条件偶延拓.（对 φ、ψ 偶延拓）$\Rightarrow$（Φ、Ψ, $x\in(-\infty,+\infty)$）.

固定端 $u(L,t)=0$ 上，为保证全时间 $(t>0)$ $u(L)=0$（端点固定），应以此点为轴对初始条件奇延拓（对 φ,ψ 奇延拓）$\Rightarrow$（Φ、Ψ, $x\in(-\infty,+\infty)$）

这样延拓之后就可应用无界弦振动的D'Alembert公式求解. 镜像法.

若一个初始条件函数 $\varphi(x)$ 或 $\psi(x)$ 被奇延拓和偶延拓共同作用，则延拓后它必是一个周期函数，可对其Fourier展开，再代入D'Alembert公式求解，则所得解形式与分离变量法一致！ 注：$(f_o)'=(f')_e$, $(f_e)'=(f')_o$.

4. 3维波动方程的 poisson公式 — Huygens原理.

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}) & (x,y,z)\in R^3, t>0 \\ u|_{t=0}=\varphi, u_t|_{t=0}=\psi. \end{cases}$$

球面对称解：$ru(r,t)=\frac{1}{2a}\int_{r-at}^{r+at}\rho\psi_e(\rho)d\rho+\frac12[(r+at)\varphi_e(r+at)+(r-at)\varphi_e(r-at)]$.

（利用 $u_x=u_r\frac{x}{r}$, ... 得 $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=u_{rr}+\frac2r u_r$）.

可推广至n维球面对称解. $\nabla^2 u=u_{rr}+\frac{n-1}{r}u_r$.

一般情况：定义球面平均值 $\bar{u}(r,t;P)=\frac{1}{4\pi r^2}\iint\limits_{S_r(P)} u(x,y,z,t)\,dS$.

$\therefore \bar{u}(r,t)=\frac{1}{4\pi}\oint\limits_{S_1(0)} u(P+r\vec{\xi},t)\,d\omega$

$\therefore \bar{u}_r(r,t)=\frac{1}{4\pi}\oint\limits_{S_1(0)} \nabla u(P+r\vec{\xi},t)\cdot\vec{\xi}\,d\omega$ $\quad\vec{\xi}$：球面单位外法向量.

$=\frac{1}{4\pi r^2}\oint\limits_{S_r(P)} \nabla u\cdot\vec{\xi}\,dS=\frac{1}{4\pi r^2}\oint\limits_{S_r(P)} \nabla u\cdot d\vec{S}$

$=\frac{1}{4\pi r^2}\iiint\limits_{B_r(P)} \nabla^2 u\,dV$

$=\frac{1}{4\pi a^2 r^2}\iiint\limits_{B_r(P)} u_{tt}\,dV$ ☆

即 $4\pi a^2 r^2\bar{u}_r(r,t)=\iiint\limits_{B_r(P)} u_{tt}(x,y,z,t)\,dV=\int_0^r\iint\limits_{S_\rho(P)} u_{tt}(x,y,z,t)\,dS\,d\rho$.

两边对 r 求导，得 $4\pi a^2(r^2\bar{u}_r)_r=\iint\limits_{S_r(P)} u_{tt}\,dS=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\iint\limits_{S_r(P)} u\,dS=\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\bar{u}\cdot 4\pi r^2)$.

$\therefore a^2(r^2\bar{u}_r)_r=(r^2\bar{u})_{tt}$. 即 $a^2(r^2\bar{u}_{rr}+2r\bar{u}_r)=r^2\bar{u}_{tt}$.

$\therefore \bar{u}_{tt}=a^2(\bar{u}_{rr}+\frac{2}{r}\bar{u}_r)$. 与球面对称解一致！

又 $\because \lim\limits_{r\to 0} r\bar{u}(r,t)=0$

$$\therefore\begin{cases}(r\bar{u})_{tt}=a^2(r\bar{u})_{rr} & r>0,\ t>0\\ (r\bar{u})|_{r=0}=0 & t>0\\ r\bar{u}(r,0)=r\bar{\varphi}(r),\ r\bar{u}_t(r,0)=r\bar{\psi}(r). & r\geq 0.\end{cases}$$ $\bar{\varphi}$、$\bar{\psi}$ 为 $S_r(P)$ 上的平均值（r 任意）

由 D'Alembert 公式：$r\bar{u}=\frac{1}{2a}\int_{r-at}^{r+at}\rho\bar{\psi}_e(\rho)\,d\rho+\frac{1}{2}[(r+at)\bar{\varphi}_e(r+at)+(r-at)\bar{\varphi}_e(r-at)]$

$\therefore \bar{u}(r,t)=\frac{1}{2ar}\int_{r-at}^{r+at}\rho\bar{\psi}_e(\rho)\,d\rho+\frac{1}{2r}[(r+at)\bar{\varphi}_e(r+at)+(r-at)\bar{\varphi}_e(r-at)]$.

为求 $P(x,y,z)$ 处的值，需 $r\to 0$，即

$u(P,t)=\lim\limits_{r\to 0}\bar{u}(r,t;P)\xlongequal{\text{L'Hospital}} t\bar{\psi}(at)+\frac{d}{dt}(t\bar{\varphi}(at))$

$=\frac{t}{4\pi a^2t^2}\iint\limits_{S_{at}(P)}\psi(x,y,z)\,dS+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{4\pi a^2t^2}\iint\limits_{S_{at}(P)}\varphi(x,y,z)\,dS\right)$. ☆

5. 2维波动方程. 一柱面波、有后效.

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) & -\infty<x,y<+\infty,\ t>0.\\ u|_{t=0}=\varphi(x,y)\\ u_t|_{t=0}=\psi(x,y). & -\infty<x,y<+\infty\end{cases}$$

只需将 $\frac{t}{4\pi a^2t^2}\iint\limits_{S_{at}(P)}\psi(x,y,z)\,dS$ 和 $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{4\pi a^2t^2}\iint\limits_{S_{at}(P)}\varphi(x,y,z)\,dS\right)$ 转化成水平圆域

$(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\leq(at)^2$ 的积分即可，即将曲面积分化为二重积分，得.

~~$u(x,y,t)=$~~ $\frac{t}{4\pi a^2t^2}\iint\limits_{S_{at}(P)}\psi(x,y,z)\,dS=2\cdot\frac{t}{4\pi a^2t^2}\iint\limits_{C_{at}(P)}\psi(\xi,\eta)\frac{at}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\,d\xi\,d\eta$.

$=\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{C_{at}(P)}\frac{\psi}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\,d\xi\,d\eta$. 对 φ 同理.

$\therefore u=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{C_{at}(P)}\frac{\varphi(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\,d\xi\,d\eta\right)+\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{C_{at}(P)}\frac{\psi(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\,d\xi\,d\eta$. ☆

三. 分离变量法.

1. 一般思想

处理非齐次边界条件(取一个形式简单的W带走非齐次边界条件或非齐次初始条件,具体带走哪个取决于欲求得哪个本征量的本征函数.因为齐次初(边)值条件才能定出本征值函数).

所有有定解条件都齐次的非齐次方程

Δ x 计算程 → 求 Sturm-Liouville-

可用齐次化(Duhamel)原理 → 求得该变量的本征函数系: ~~若是有界的初(边)值条件,可定出离散谱的本征函数;若是无界则定出连续谱的本征函数~~

~~[illegible]~~

普通函数 δ函数.

Fourier展开 ⇒ 离散谱: 连续谱 ⇐ 积分变换: Fourier

解其阶常微分方程

系数 ⇒ 叠加原理 积分(逆变换) ⇐ 系数.

~~解常微分方程: Sturm-Liouville~~.

形式简单!

1) Sturm-Liouville 理论.

二阶齐次方程. $Au_{\xi\xi}+Bu_{\xi\eta}+Cu_{\eta\eta}+Du_\xi+Eu_\eta+fu=0.$

通过变换 $\begin{cases} x=x(\xi,\eta) \\ y=y(\xi,\eta) \end{cases}$ $\quad \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\neq 0.$

可化为标准形式 $a(x,y)u_{xx}+c(x,y)u_{yy}+d(x,y)u_x+e(x,y)u_y+f(x,y)u=0$

假设方程的解的形式为 $u=X(x)\cdot Y(y)$. (二次可微) 代入上式得

$$aX''Y+cXY''+dX'Y+eXY'+fXY=0$$

假设. $\exists\, P(x,y)$ 使上方程除 $P(x,y)$ 后能写成 $a_1(x)X''Y+b_1(y)XY''+a_2(x)X'Y+b_2(y)XY'+(a_3(x)+b_3(y))XY=0$

的形式,也即 $a_1(x)\dfrac{X''}{X}+a_2(x)\dfrac{X'}{X}+a_3(x)=-\left[b_1(y)\dfrac{Y''}{Y}+b_2(y)\dfrac{Y'}{Y}+b_3(y)\right]$

则 $a_1\dfrac{X''}{X}+a_2\dfrac{X'}{X}+a_3=\lambda$, $\quad b_1\dfrac{Y''}{Y}+b_2\dfrac{Y'}{Y}+b_3=-\lambda$.

即 $a_1X''+a_2X'+(a_3-\lambda)X=0$, $\quad b_1Y''+b_2Y'+(b_3+\lambda)Y=0$.

都可写为 $c_1(x)\dfrac{d^2u}{dx^2}+c_2(x)\dfrac{du}{dx}+(c_3(x)+\lambda)u=0.$

引入 $p(x)=e^{\int\frac{c_2}{c_1}dx}$, $q(x)=\dfrac{c_3}{c_1}p(x)$, $s(x)=\dfrac{1}{c_1}p(x)$, 得 $\dfrac{d}{dx}\left(p\dfrac{du}{dx}\right)+qu+\lambda su=0$ ⇒ S-L方程

定义 施图姆-刘维尔算子 $L(u)=\frac{d}{dx}(p\frac{du}{dx})+qu$，则 S-L 方程写作 $L(u)+\lambda s(x)u=0$

{ 正则 S-L 问题 $x\in[a,b]$ $p(x),s(x)>0$.
{ 奇异 S-L 问题. $x\in$ 半无界、无界区间，或 p、s 在 $[a,b]$ 的 ≥ 1 个端点取 0.

经过 非齐次边界条件处理后，边界条件都可写成：

$$\begin{cases} a_1 u(a)+a_2 u'(a)=0 & a_1^2+a_2^2\neq 0 \\ b_1 u(b)+b_2 u'(b)=0 & b_1^2+b_2^2\neq 0 \end{cases}$$

eg $\begin{cases} u(a)=u(b) \\ u'(a)=u'(b) \end{cases}$ 周期边界条件. eg 奇点处的自然边界条件.

本征值：使 S-L 问题有非零解的 λ.

本征函数：对应于本征值的非零解 ~~X or Y~~ $u(x)$. 也即 X or Y.

结论1：对应于不同本征值 λ_j 和 λ_k 的本征函数 u_j 和 u_k 都连续可微.

则 u_j 和 u_k 在 $[a,b]$ 上带权 $s(x)$ 正交

证明：$\frac{d}{dx}(pu_j')+(q+\lambda_j s)u_j=0$ $\frac{d}{dx}(pu_k')+(q+\lambda_k s)u_k=0$

$\therefore (\lambda_j-\lambda_k)su_ju_k=u_k\frac{d}{dx}(pu_j')-u_j\frac{d}{dx}(pu_k')=\frac{d}{dx}[(pu_j')u_k-(pu_k')u_j]$

在 $[a,b]$ 上积分. 得 $(\lambda_j-\lambda_k)\int_a^b su_ju_k dx=[p(u_j'u_k-u_ju_k')]\Big|_a^b$

$=p(b)[u_j'(b)u_k(b)-u_j(b)u_k'(b)]-p(a)[u_j'(a)u_k(a)-u_j(a)u_k'(a)]$

$\because \begin{cases} a_1 u_j(a)+a_2 u_j'(a)=0 \\ a_1 u_k(a)+a_2 u_k'(a)=0 \end{cases}$ $\begin{cases} b_1 u_j(b)+b_2 u_j'(b)=0 \\ b_1 u_k(b)+b_2 u_k'(b)=0 \end{cases}$

且 $a_1^2+a_2^2\neq 0$、$b_1^2+b_2^2\neq 0$

经讨论易得 $(\lambda_j-\lambda_k)\int_a^b s(x)u_ju_k dx=0$. $\because \lambda_j\neq\lambda_k$ $j\neq k$.

$\therefore \int_a^b su_ju_k dx=0$.

结论2：正则 ($p(x)$、$s(x)>0$、$x\in[a,b]$) S-L 问题所有本征值都是实数

证明：设有一复 $\lambda_j=\alpha+i\beta$，对应的本征函数 $u_j=v+iw$

因方程的系数为实，故 λ_j 的共轭复数也是本征值，设 $\lambda_k=\alpha-i\beta$ 的

本征函数 $u_k=v-iw$ $\because (\lambda_j-\lambda_k)\int_a^b su_ju_k dx=0$

$\therefore 2\beta\int_a^b s(v^2+w^2)dx=0$ $\therefore \beta=0$ $\therefore$ 本征值皆为实.

结论3：$\forall$ S-L $\exists$ 一实本征值的无穷序列 $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3\cdots$ 除 $\lambda_n=0$，对应的 u_n

在 (a,b) 内有 n 零点，$f(x)=\sum c_nu_n$，$c_n=\int_a^b s(x)f(x)u_n dx/\int_a^b su_n^2 dx$.

2) 对于所有边界、初值条件都齐次化的非齐次方程，可用齐次化 Duhamel原理（有界、无界区间皆可）.

eg
$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+f(x,t) & 0<x<L,\ t>0 \\ u(0,t)=u(L,t)=0 & t>0 \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 & 0\le x\le L. \end{cases}$$

的解为 $u(x,t)=\int_0^t v(x,t-s;s)\,ds$，其中

$$\begin{cases} v_{tt}=v_{xx} & 0<x<L,\ t>0 \\ v(0,t;s)=v(L,t;s)=0 & t>0 \\ v(x,0;s)=0 & 0<x<L \\ v_t(x,0;s)=f(x,s). & 0<x<L. \end{cases}$$

验证：$u_{xx}=\int_0^t v_{xx}(x,t-s;s)\,ds$

$$u_t=\int_0^t v_t(x,t-s;s)\,ds+v(x,t-t;t)$$
$$=\int_0^t v_t(x,t-s;s)\,ds+v(x,0;t).$$
$$=\int_0^t v_t(x,t-s;s)\,ds$$
$$\therefore u_{tt}=\int_0^t v_{tt}(x,t-s;s)\,ds+v_t(x,0;t)$$
$$=a^2u_{xx}+f(x,t)$$

其它易于验证

eg
$$\begin{cases} u_t=u_{xx}+f(x,t) & 0<x<L,\ t>0 \\ u(0,t)=u(L,t)=0 & t>0 \\ u(x,0)=0 & 0\le x\le L. \end{cases}$$

的解为 $u(x,t)=u(x,t)=\int_0^t v(x,t-s;s)\,ds$，其中

$$\begin{cases} v_t=\cancel{a}\,v_{xx} & 0<x<L,\ t>0 \\ v(0,t;s)=v(L,t;s)=0 & t>0. \\ v(x,0;s)=f(x,s) & 0\le x\le L \end{cases}$$

验证：$u_{xx}=\int_0^t v_{xx}(x,t-s;s)\,ds.$

$$u_t=\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}v(x,t-s;s)\,ds+v(x,t-t;t).$$
$$=\int_0^t v_t(x,t-s;s)\,ds+f(x,t).$$
$$=u_{xx}+f(x,t).$$

对于无界各方程的情况，由于物理意义和验证方法本质一样，不需再写.

~~3) 离散问题~~.

3) 连续谱上的积分变换.

由S-L理论，$\frac{d}{dx}(p\frac{du}{dx})+qu+\lambda su=0$ 当[a,b]端点上有齐次边界条件时，分离变量产生的λ可由这样的边界条件定出，成为一个离散列λ_n，每个对应于一个特征函数X_n或Y_n……用叠加原理将这样的特征函数叠加即得原方程的解.

若无这种边界条件，就无离散谱的特征子空间，对于连续谱的不可列特征空间，叠加变为积分，特征值连续分布.

满足Dirichlet条件的周期函数在$[-l,l]$上Fourier展开，得

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)$$
$$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{k\pi t}{l}\,dt \qquad k=0,1,2\cdots$$
$$b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{k\pi t}{l}\,dt \qquad k=1,2,3\cdots$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\,dt+\frac{1}{l}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{k\pi t}{l}\cos\frac{k\pi x}{l}\,dt+\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{k\pi t}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\,dt\right].$$

若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积，即 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt$ 收敛，则

$$\frac{1}{2l}\left|\int_{-l}^{l} f(t)dt\right| \le \frac{1}{2l}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt \to 0.\ (l\to+\infty).$$

$$\therefore f(x)=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\left[\frac{k\pi}{l}(t-x)\right]dt$$ ——非周期函数 $-\infty\sim+\infty$.

记 $\alpha_k=\frac{k\pi}{l}$，$\Delta\alpha=\alpha_{k+1}-\alpha_k=\frac{\pi}{l}$，则

$$f(x)=\lim_{l\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\alpha_k(t-x)dt\Delta\alpha.$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\alpha(t-x)dt\,d\alpha$$

若 $f(x)$ 在 x 连续，则 $f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\alpha(t-x)}dt\,d\alpha+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\alpha(t-x)}dt\,d\alpha$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\alpha(t-x)}dt\,d\alpha+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\alpha(t-x)}dt\,d\alpha$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\alpha t}dt\right]e^{i\alpha x}d\alpha.$$

Fourier 变换：$F(\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\alpha t}dt$；Fourier 逆变换 $f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha$

Fourier 正弦变换：$f(x)$ 在 $0\sim+\infty$ 上分段光滑、绝对可积且连续，奇延拓之，则

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)(\cos\alpha t\cos\alpha x+\sin\alpha t\sin\alpha x)dt\right]d\alpha$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\alpha t\sin\alpha x\,dt\,d\alpha$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}f(t)\sin\alpha t\sin\alpha x\,dt\,d\alpha.$$

同理，Fourier 余弦变换 $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}f(t)\cos\alpha t\cos\alpha x\,dt\,d\alpha.$

线性：$F[\alpha f+bg]=aF[f]+bF[g]$.　微分：$F[f']=i\alpha F[f]$

位移：$F[f(t-c)]=e^{-i\alpha c}F[f(t)]$.　卷积：$F[f*g]=F[f]\cdot F[g]$

相似：$F[f(ct)]=\frac{1}{|c|}F(\frac{\alpha}{c})$.　积分：$F[\int_{t_0}^{t}f(\tau)d\tau]=\frac{1}{i\alpha}F[f]$

Laplace 变换：$F(s)=\int_0^{+\infty}e^{-st}f(t)dt$，$|s|>0$，$s\in\mathbb{C}$.

线性：$L[af+bg]=aL[f]+bL[g]$

位移：$L[e^{at}f(t)]=L[f(s-a)]$

相似：$L[f(ct)]=\frac{1}{|c|}\cancel{L[f(\frac{s}{c})]}L(\frac{s}{c})$

微分：$L[f^{(n)}(t)]=s^nL[f(t)]-s^{n-1}f(0)-\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$.

卷积：$L[f*g]=L[f]\cdot L[g]$.

积分：$L[\int_{t_0}^{t}f(\tau)d\tau]=\frac{1}{s}L[f]$.

方程和边界条件皆为非齐次时也可用积分变换法.

2. 高维情形(直角坐标)

eg. 3维热传导 $u_t = a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$.

分离变量 $u(x,y,z,t) = U(x,y,z)\cdot T(t)$. $\Rightarrow \frac{T'}{a^2T} = \frac{\nabla^2 U}{U} = -\lambda$.

$\Rightarrow$ Helmholtz $\nabla^2 U + \lambda U = 0$.

设 $(x,y,z) \in [0,L]\times[0,M]\times[0,N]$. 第一类齐次边界条件下, $U = X(x)Y(y)Z(z)$

$\Rightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} + \lambda = 0$. $\Rightarrow \alpha_L = \left(\frac{L\pi}{L}\right)^2$, $\beta_m = \left(\frac{m\pi}{M}\right)^2$, $\gamma_n = \left(\frac{n\pi}{N}\right)^2$.

$\lambda_{l,m,n} = \alpha_l + \beta_m + \gamma_n$

$\Rightarrow$ 特征函数族 $U_{lmn}(x,y,z) = \sin\frac{l\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{M}\sin\frac{n\pi z}{N}$. 再解 $T' + \lambda a^2 T = 0$

得 $T_{lmn}(t) = C_{lmn}e^{-\lambda_{lmn}a^2t}$.

$\Rightarrow u = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{lmn}e^{-\lambda_{lmn}a^2t}U_{lmn}(x,y,z)$, C_{lmn} 由三重积分(初始条件)定出.

remark: 高维齐次波动及高维 Laplace 皆可解, 非齐次边界条件与低维类似处理.

3. 高维情形(柱坐标、球坐标)

三类典型方程的高维问题转化为求解 $\nabla^2 U + \lambda U = 0$ or $\nabla^2 U = 0$.

特例: $\nabla^2 U = 0$ 的球对称解: 由高斯定理.

$\int_\Omega \nabla\cdot\nabla U\, dV = C$ $\therefore \oint_{\partial\Omega} \nabla U\, d\vec{S} = C$ $\therefore \oint_{\partial\Omega}\frac{\partial U}{\partial r}dS = C$

$\therefore \oint_{\partial\Omega_1} r^{n-1}\frac{\partial U}{\partial r}d\omega = C$ $\therefore \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{C}{\omega_n r^{n-1}}$.

☆ $\therefore U = \begin{cases} \frac{1}{2-n}\frac{C}{\omega_n r^{n-2}} & n\geq 3 \\ \frac{C}{2\pi}\ln r & n=2. \end{cases}$

或由 $\nabla^2 U = U_{rr} + \frac{n-1}{r}U_r = 0$. 设 $r = e^t$, 则 $U_r = \frac{dU}{dt}\frac{dt}{dr} = \frac{1}{r}U_t$

$U_{rr} = -\frac{1}{r^2}U_t + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}U_t = -\frac{1}{r^2}U_t + U_{tt}\cdot\frac{1}{r^2}$. $\therefore \nabla^2 U = \frac{1}{r^2}U_{tt} - \frac{1}{r^2}U_t + \frac{n-1}{r^2}U_t = 0$.

$\therefore U_{tt} + (n-2)U_t = 0$. 同样可解得如上结果.

柱坐标下, $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z. \end{cases}$ $\nabla^2 u = \frac{1}{r}(ru_r)_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + u_{zz}$.

球坐标下, $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi & \theta\in[0,\pi) \\ y = r\sin\theta\sin\varphi & \varphi\in[0,2\pi). \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ $\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}(r^2u_r)_r + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta u_\theta)_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi}$.

平移不变: $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = u_{xx} + u_{yy}$

旋转不变: $\frac{1}{2}[u_{xx}(P) + u_{yy}(P)] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d^2}{dt^2}u(r(t))\,d\theta$.

① 圆域上的 Laplace.

$$\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0 & 0<r<r_0,\ 0<\theta<2\pi \\ u(r_0,\theta)=\varphi(\theta) & 0\le\theta<2\pi \quad \text{一般边界条件} \\ \lim\limits_{r\to0^+}|u(r,\theta)|<\infty & 0\le\theta<2\pi \quad \text{自然条件} \\ u(r,0)=u(r,2\pi) & 0<r<r_0 \quad \text{周期条件} \\ u_\theta(r,0)=u_\theta(r,2\pi) & 0<r<r_0 \end{cases}$$

令 $u(r,\theta)=R(r)\cdot\Phi(\theta) \Rightarrow \begin{cases} r^2R''+rR'-\lambda R=0 \\ \Phi''+\lambda\Phi=0 \end{cases}$

先解 $\begin{cases} \Phi''+\lambda\Phi=0 \\ \Phi(0)=\Phi(2\pi),\ \Phi'(0)=\Phi'(2\pi) \end{cases} \Rightarrow \lambda=n^2\ (n=0,1,2\cdots)$.

$\therefore \Phi_n(\theta)=A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta$.

再解 $\begin{cases} r^2R''+rR'-\lambda R=0 \\ \lim\limits_{r\to0^+}|u(r,\theta)|<\infty \end{cases}$ Euler方程.

令 $r=e^t$，则 $\frac{dR}{dr}=\frac{dR}{dt}\cdot\frac{1}{r}$，$\frac{d^2R}{dr^2}=-\frac{1}{r^2}\frac{dR}{dt}+\frac{1}{r}\frac{d^2R}{dt^2}\cdot\frac{1}{r}=\frac{1}{r^2}\frac{d^2R}{dt^2}-\frac{1}{r^2}\frac{dR}{dt}$.

$\therefore \begin{cases} n=0\text{时} & R_0(r)=c_0+d_0\ln r \\ n=1,2,\cdots\text{时}. & R_n(r)=c_nr^n+d_nr^{-n} \end{cases}$

$\because |R(0)|<+\infty$. $\therefore R_0(r)=c_0$，$R_n(r)=c_nr^n$ $n=1,2,\cdots$

$\therefore R_n(r)=c_nr^n$ $n=0,1,2\cdots$

$\therefore u(r,\theta)=\sum\limits_0^\infty r^n(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)$ 代入一般边界条件，得 $\varphi(\theta)=\sum\limits_0^\infty r_0^n(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)$

$\therefore \begin{cases} a_n=\frac{1}{\pi r_0^n}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\cos n\theta\,d\theta \\ b_n=\frac{1}{\pi r_0^n}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\sin n\theta\,d\theta. \end{cases}$

当区域为环形域时，没有自然条件，只有周期条件. $R_0(r)=c_0+d_0\ln r$，$R_n(r)=c_nr^n+d_nr^{-n}$

当区域为扇形域时，没有周期条件，只有自然条件，还需加径向的边界条件.

当区域为扇环时，两者皆无！两种边界条件皆需加. 需加内环的边界条件.

② 圆域上的 Helmholtz.

$$\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}+\lambda u=0. & 0<r<r_0,\ 0<\theta<2\pi \\ u(r_0,\theta)=0 & 0\le\theta<2\pi \quad \text{一般边界条件} \\ \lim\limits_{r\to0^+}|u(r,\theta)|<\infty & 0\le\theta<2\pi \quad \text{自然条件} \\ u(r,0)=u(r,2\pi) & 0<r<r_0 \quad \text{周期条件.} \\ u_\theta(r,0)=u_\theta(r,2\pi). & 0<r<r_0 \end{cases}$$

令 $u(r,\theta)=R(r)\Phi(\theta)$，$R''\Phi+\frac{1}{r}R'\Phi+\frac{1}{r^2}R\Phi''+\lambda R\Phi=0$. λ为方程中常数.

$\therefore \frac{r^2R''+rR'}{R}+\lambda r^2=-\frac{\Phi''}{\Phi}=\mu$.

$\therefore \begin{cases} r^2R''+rR'+(\lambda r^2-\mu)R=0 \\ \Phi''+\mu\Phi=0. \end{cases}$

先解 $\begin{cases} \Phi''+\mu\Phi=0 \\ \Phi(0)=\Phi(2\pi),\ \Phi'(0)=\Phi'(2\pi). \end{cases}$ $\Rightarrow \Phi_n(\theta)=A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta \quad n=0,1,2\cdots$

再解 $\begin{cases} r^2R''+rR'+(\lambda r^2-n^2)R=0 \\ |R(0)|<\infty,\ R(r_0)=0 \end{cases}$

作代换 $x=\sqrt{\lambda}\,r$，若λ为负值，则x为复变量，$f(x)=R(r)=R\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$ $\therefore \sqrt{\lambda}f'(x)=R'(r),\ \lambda f''(x)=R''(r)$

得 $x^2f''+xf'+(x^2-n^2)f=0.$ → n阶Bessel方程.

圆域或柱形域上的Helmholtz（柱形域上的Laplace）都可转化为Bessel方程.

设有广义幂级数解 $f(x)=x^c\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$. c、a_k待定 $k=0,1,2\cdots$

代入Bessel得 $\sum_0^\infty(k+c)(k+c-1)a_kx^{k+c-2}\cdot x^2+\sum_0^\infty(k+c)a_kx^{k+c-1}\cdot x+\sum_0^\infty a_kx^{k+c+2}-n^2\sum_0^\infty a_kx^{k+c}$
$=0.$

化简得 $(c^2-n^2)a_0x^c+[(1+c)^2-n^2]a_1x^{1+c}+\sum_{k=2}^{\infty}x^{k+c}[((k+c)^2-n^2)a_k+a_{k-2}]=0.$

$$\Rightarrow\begin{cases}(c^2-n^2)a_0=0\\ [(1+c)^2-n^2]a_1=0\\ [(k+c)^2-n^2]a_k+a_{k-2}=0\end{cases} \xRightarrow{c^2=n^2} \begin{cases}(1+2c)a_1=0\\ k(k+2c)a_k+a_{k-2}=0. \quad k=2,3,\cdots\end{cases}$$

1) 若 $c=n$

$$\begin{cases}a_1=0\\ a_k=-\dfrac{a_{k-2}}{k(k+2c)} \quad k=2,3,\cdots\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a_1=a_3=\cdots=a_{2k-1}=0\\ a_{2m}=-\dfrac{a_{2m-2}}{2m(2m+2c)} \quad m=1,2,\cdots\end{cases}$$

$\therefore a_{2m}=\dfrac{(-1)^m a_0}{2^{2m}\,m!\,(m+c)(m-1+c)\cdots(1+c)}$ $\quad\therefore f_1(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_{2m}x^{2m+c}=\sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+1+n)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m+n}$

2) 若 $c=-n$

I. $2n\notin Z^+$ $\quad k+2c=k-2n\neq0,\ k=1,2,3\cdots \Rightarrow$

$$\begin{cases}a_1=0\\ a_k=-\dfrac{a_{k-2}}{k(k+2c)}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a_{2m-1}=0\\ a_{2m}=\dfrac{(-1)^m a_0}{2^{2m}\,m!\,(m+c)(m-1+c)\cdots(1+c)}\end{cases}$$

II. $2n$为奇数 $\exists\, 0\le m_0\in Z^+$，使$2m_0+1+2c=0$. $\Rightarrow$

$$\begin{cases}a_1=a_3=\cdots=a_{2m_0-1}=0\\ a_{2m}=\dfrac{(-1)^m a_0}{2^{2m}\,m!\,(m+c)(m-1+c)\cdots(1+c)}. \quad m=1,2,\cdots,m_0.\end{cases}$$

为使$\forall m$，$2m-1>2m_0-1$时$a_{2m-1}=0$，取$a_{2m_0+1}=0$，这样由$k(k+2c)a_k+a_{k-2}=0$
得 $\forall m\in Z^+$，$a_{2m-1}=0$.

III. $2n$为偶数，$\exists\, 0\le m_0\in Z^+$，使$2m_0+2c=0$ $\Rightarrow$

$a_{2m_0-2}=a_{2m_0-4}=\cdots=a_0=0$. 与$a_0\neq0$矛盾.

综合上面三种情况，若$c=-n$，$f_2(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_{2m}x^{2m+c}=\sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+1-n)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m-n}$

$\forall s\le0,\ s\in Z,\ \dfrac{1}{\Gamma(s)}=0!$

综合 $C=\pm n$，得 Bessel 方程的解 $y=x^c\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+1+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}$ $n\in\mathbb{R}$

n 不为整数时，由于 $\Gamma(m+1+n)$ $(m=0,1,2\cdots)$ 在自变量为负的非整数时为有限值

故 f_2 在 0 点不收敛，f_1 在 0 点收敛至 0，可知此情况下 f_1、f_2 线性无关。

$\therefore y(x)=Af_1(x)+Bf_2(x)=AJ_n(x)+BJ_{-n}(x)$ → Bessel 函数

n 为整数时，$\because \frac{1}{\Gamma(m+1-n)}=0$ $(m+1\le n)$ $\therefore J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x)$，$J_{-n}$ 与 J_n 线性相关

构造 $Y_n=\frac{J_n(x)\cos n\pi-J_{-n}(x)}{\sin n\pi}$，则 $\lim_{\alpha\to n}Y_\alpha(x)$ 与 J_n 线性无关。

Y_n 在 0 点不收敛。 → 第二类 Bessel 函数

综上，$n\in\mathbb{R}$ 时，Bessel 方程通解写成 $y=AJ_n(x)+BY_n(x)$

$\therefore$ 原方程的解为 $R(r)=AJ_n(\sqrt{\lambda}r)+BY_n(\sqrt{\lambda}r)$.

$\because |R(0)|<\infty$ $\quad\therefore R(r)=AJ_n(\sqrt{\lambda}r)$.

~~$\therefore u(r,\theta)=\sum_{0}^{\infty}J_n(\sqrt{\lambda}r)$~~ $\because R(r_0)=0$ $\therefore J_n(\sqrt{\lambda}r_0)=0$. $\therefore \sqrt{\lambda}r_0=\mu_m^{(n)}$ $m=1,2,3\cdots$

$\therefore \lambda_m=\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}\right)^2$. $\therefore R_m(r)=A_mJ_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}\cdot r\right)$.

$\therefore u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right)\cdot\left(A_{mn}\cos n\theta+B_{mn}\sin n\theta\right)$.

remark: $J_n(x)$ 有无穷多单重实轴对称零点.

$J_n(x)$ 与 $J_{n+1}(x)$ 零点相间分布

两零点在 $m\to\infty$ 时，距离趋于 π，$J_n(x)$ 趋于周期为 2π 的函数.

$\left\{J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}r\right)\right\}$ $\begin{cases}\text{完备性.}\\ \text{正交性.}\end{cases}$ $\begin{cases}k\ne m, & \int_0^R rJ_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}r\right)J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{R}r\right)dr=0\\ k=m, & \int_0^R rJ_n^2\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}\cdot r\right)dr=\frac{R^2}{2}\left[J_n'\left(\mu_m^{(n)}\right)\right]^2.\end{cases}$

第一类 Bessel 函数 $J_n(x)$ 的性质：$J_n(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+1+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}$. $n\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases}xJ_n'+nJ_n=xJ_{n-1}\\ xJ_n'-nJ_n=-xJ_{n+1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{d}{dx}\left[x^nJ_n(x)\right]=x^nJ_{n-1}(x)\\ \frac{d}{dx}\left[x^{-n}J_n(x)\right]=-x^{-n}J_{n+1}(x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)=\frac{2}{x}nJ_n(x)\\ J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)=2J_n'(x).\end{cases}$$

$$\begin{cases}J_{\frac12}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x\\ J_{-\frac12}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.\end{cases}$$

(利用 $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{s-1}dx$)

利用 $J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)=\frac{2}{x}nJ_n(x)$，得.

$$\begin{cases}J_{n+\frac12}(x)=(-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{n+\frac12}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n\left(\frac{\sin x}{x}\right)\\ J_{-(n+\frac12)}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{n+\frac12}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n\left(\frac{\cos x}{x}\right).\end{cases}$$

虚宗量Bessel函数来源：$y''+\frac{1}{x}y'-(1+\frac{n^2}{x^2})y=0$

令 $x=-it$，$dx=-idt$，$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{i}\frac{dy}{dt}$，$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{d^2y}{dt^2}$.

∴原方程化为 $\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{1}{t}\frac{dy}{dt}+(1-\frac{n^2}{t^2})y=0$.

∴ $y=AJ_n(ix)+BY_n(ix)$

$J_n=i^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!\Gamma(m+1+n)}(\frac{x}{2})^{2m+n}$ 记 $I_n(x)=i^{-n}J(ix)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!\Gamma(m+1+n)}(\frac{x}{2})^{2m+n}$.

$K_n=\lim_{\alpha\to n}\frac{\frac{1}{2}\pi[I_{-\alpha}(x)-I_\alpha(x)]}{\sin\alpha\pi}$ 第一类虚宗量Bessel函数、第二类虚宗量Bessel函数.

∴ $y=AI_n(x)+BK_n(x)$. 不存在实零点，$n\in R$

生成函数：$w(x,t)=e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(x)t^n$.

∵ $e^{\frac{1}{2}xt}=\sum_0^\infty\frac{1}{n!}(\frac{xt}{2})^n$，$e^{-\frac{1}{2}\frac{x}{t}}=\sum_0^\infty\frac{1}{n!}(-\frac{x}{2t})^n$.

∴ t^n 前的系数为 $\frac{(\frac{x}{2})^n}{n!}-\frac{(\frac{x}{2})^{n+2}}{1!(n+1)!}+\frac{(\frac{x}{2})^{n+4}}{2!(n+2)!}-\frac{(\frac{x}{2})^{n+6}}{3!(n+3)!}+\cdots$

$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+1+n)}(\frac{x}{2})^{2m+n}$.

积分形式：令 $|t|=1$，即 $t=e^{i\theta}$，代入生成函数，得 $e^{\frac{x}{2}[(\cos\theta+i\sin\theta)-(\cos\theta-i\sin\theta)]}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(x)e^{in\theta}$

用 $e^{-ik\theta}$ 乘上式两端并对 θ 在 $[-\pi,\pi]$ 上积分，得

$\int_{-\pi}^{\pi}e^{\frac{x}{2}2i\sin\theta}\cdot e^{-ik\theta}d\theta=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(x)\int_{-\pi}^{\pi}e^{in\theta}e^{-ik\theta}d\theta=2\pi J_n(x)$

即 $J_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ix\sin\theta-ik\theta}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\cos(x\sin\theta-k\theta)d\theta$.

③ 球域上的Helmholtz.

$$\begin{cases}\frac{1}{r^2}(r^2u_r)_r+\frac{1}{r^2}[\frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta u_\theta)_\theta+\frac{1}{\sin^2\theta}u_{\phi\phi}]+\lambda u=0. & 0<r<r_0,\ 0<\theta<\pi,\ 0<\phi<2\pi.\\ u(r_0,\theta)=\varphi(\theta)\text{、自然条件、周期条件}\Rightarrow\alpha=m^2.\end{cases}$$

令 $u(r,\phi,\theta)=R(r)\Phi(\phi)\Theta(\theta)$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{r^2}\frac{(r^2R')'}{R}+\frac{1}{r^2}(\frac{1}{\sin\theta}\frac{(\sin\theta\Theta')'}{\Theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\Phi''}{\Phi})+\lambda=0$.

$$\begin{cases}\Phi''+\alpha\Phi=0\\ \frac{1}{\sin\theta}\frac{(\sin\theta\Theta')'}{\Theta}+\frac{-\alpha}{\sin^2\theta}=-\mu & \to \text{Legendre 连带}\\ r^2R''+2rR'+(\lambda r^2-\mu)R=0 & \to \text{球Bessel}.\end{cases}$$

事实上 $x^2f''+axf'+(b+cx^d)f=0$ $(cd\neq0)$ 皆可化为Bessel方程.

令 $x=kt^\alpha$，$u(t)=t^{-\beta}f(kt^\alpha)$

∴ $\frac{dx}{dt}=\alpha kt^{\alpha-1}$，$\frac{df}{dx}=\frac{df}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{d[t^\beta u(t)]}{dt}(\frac{dx}{dt})^{-1}=(\beta t^{\beta-1}u+t^\beta\frac{du}{dt})(\alpha kt^{\alpha-1})^{-1}$

$=\frac{\beta}{\alpha k}t^{\beta-\alpha}u+\frac{1}{\alpha k}t^{\beta-\alpha+1}\frac{du}{dt}$.

$$\frac{d^2f}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{df}{dx}\right)\frac{dt}{dx}=\left\{\frac{\beta(\beta-\alpha)}{\alpha k}t^{\beta-\alpha-1}u+\frac{\beta}{\alpha k}t^{\beta-\alpha}\frac{du}{dt}+\frac{\beta-\alpha+1}{\alpha k}t^{\beta-\alpha}\frac{du}{dt}+\frac{1}{\alpha k}t^{\beta-\alpha+1}\frac{d^2u}{dt^2}\right\}\frac{1}{\alpha k}t$$

$$=\frac{\beta(\beta-\alpha)}{\alpha^2k^2}t^{\beta-2\alpha}+\frac{2\beta-\alpha+1}{\alpha^2k^2}t^{\beta-2\alpha+1}\frac{du}{dt}+\frac{1}{\alpha^2k^2}t^{\beta-2\alpha+2}\frac{d^2u}{dt^2}.$$

代入原方程，得 $\frac{\beta(\beta-\alpha)}{\alpha^2}t^{\beta}u+\frac{2\beta-\alpha+1}{\alpha^2}t^{\beta+1}\frac{du}{dt}+\frac{1}{\alpha^2}t^{\beta+2}\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{a\beta}{\alpha}t^{\beta}u+\frac{a}{\alpha}t^{\beta+1}\frac{du}{dt}+(b+ck^dt^{\alpha d})t^{\beta}u=0$

即 $\frac{1}{\alpha^2}t^2\frac{d^2u}{dt^2}+\left(\frac{2\beta-\alpha+1}{\alpha^2}+\frac{a}{\alpha}\right)t\frac{du}{dt}+\left(\frac{\beta(\beta-\alpha)}{\alpha^2}+\frac{a\beta}{\alpha}+b+ck^dt^{\alpha d}\right)u=0$

即 $t^2\frac{d^2u}{dt^2}+[2\beta+(a-1)\alpha+1]t\frac{du}{dt}+[\beta(\beta-\alpha)+(a\alpha\beta+b\alpha^2+c\alpha^2k^dt^{\alpha d})]u=0.$

$$\therefore\begin{cases}2\beta+(a-1)\alpha+1=1.\\ c\alpha^2k^d=1\\ \alpha d=2.\end{cases}$$

设 $(a-1)\alpha\beta+b\alpha^2+\beta^2=-n^2\ (<0)$. 则方程变为Bessel (n阶)：

$$\triangle\quad t^2u''+tu'+(t^2-n^2)u=0.$$

④ 推广Bessel方程 $a=2$，$d=2$，$b=-\mu$，$c=\lambda$，旋转对称条件下，该Bessel方程可化成有关u(r)的简单方程求解.

$$\therefore\begin{cases}2\beta+\alpha=0\\ \lambda\alpha^2k^2=1\\ \alpha=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=-\frac{1}{2}\\ k=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}t\\ u(t)=\sqrt{t}f\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}t\right)=\sqrt{t}f(x).\end{cases}$$

④ 球域上的 Laplace

$$\begin{cases}\frac{1}{r^2}(r^2u_r)_r+\frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta u_\theta)_\theta+\frac{1}{\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi}\right]=0. & 0<r<1,\ 0<\theta<\pi,\ 0<\varphi<2\pi.\\ u(1,\theta,\varphi)=f(\theta,\varphi). & 0\le\theta<\pi,\ 0\le\varphi<2\pi \text{ —— 一般边界}\\ \lim_{r\to0^+}|u(r,\theta,\varphi)|<\infty & 0\le\theta<\pi,\ 0\le\varphi<2\pi \text{ —— 自然条件}\\ u(r,\theta,0)=u(r,\theta,2\pi) & 0\le\theta<\pi,\ 0\le r\le1. \text{ —— 周期条件}\\ u_\varphi(r,\theta,0)=u_\varphi(r,\theta,2\pi) & 0\le\theta<\pi,\ 0\le r\le1\\ \lim_{\theta\to0}|u(r,\theta,\varphi)|<\infty、\lim_{\theta\to\pi}|u(r,\theta,\varphi)|<\infty、\theta=0\text{时},\Theta=1 \text{ — 正规化(不必列出)}.\end{cases}$$

令 $u=R(r)\Phi(\varphi)\Theta(\theta)$，得 $\frac{(r^2R')'}{R}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{(\sin\theta\,\Theta')'}{\Theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\Phi''}{\Phi}=0.$

$$\therefore\begin{cases}\Phi''+\alpha\Phi=0\\ \frac{1}{\sin\theta}\frac{(\sin\theta\,\Theta')'}{\Theta}-\frac{\alpha}{\sin^2\theta}=-\mu\\ r^2R''+2rR'-\mu R=0 \longrightarrow \text{Euler方程}.\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases}\Phi=C_1\cos m\varphi+C_2\sin m\varphi,\quad \alpha=m^2.\\ R=c\,r^{\frac{-1+\sqrt{1+4\mu}}{2}}.\quad \mu\text{待定}.\end{cases}$$

作代换 $x=\cos\theta$，$f(x)=\Theta(\theta)$，则 $-1<x<1$.

有 $\frac{1}{\sin\theta}\frac{\sin\theta\,\Theta''}{\Theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\Theta'}{\Theta}-\frac{m^2}{1-\cos^2\theta}=-\mu.\Rightarrow\frac{\Theta''}{\Theta}+\cot\theta\frac{\Theta'}{\Theta}-\frac{m^2}{1-\cos^2\theta}=-\mu.$

$\frac{d\Theta}{d\theta}=\frac{df}{dx}\frac{dx}{d\theta}=-f'\sin\theta$, $\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}=-f''\frac{dx}{d\theta}\sin\theta-f'\cos\theta=f''\sin^2\theta-f'\cos\theta=(1-x^2)f''-xf'$.

$\therefore (1-x^2)f''-2xf'+(\mu-\frac{m^2}{1-x^2})f=0$. → 连带 Legendre 方程.

若 u 与 φ 无关，即 $u=R(r)\cdot\Theta(\theta)$，则 $\alpha=m^2=0$. 上方程化为 (u 绕柱对称)

$(1-x^2)f''-2xf'+\mu f=0$. $|x|<1$. → Legendre 方程.

先解 Legendre 方程：记 $\mu=n(n+1)$ 在复数域内 n 有解.

设有幂级数解 $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$，代入方程得：

$(1-x^2)\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)a_kx^{k-2}-2x\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^{k-1}+n(n+1)\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=0$

即 $\sum_{k=0}^{\infty}[(k+2)(k+1)a_{k+2}+[n(n+1)-k(k+1)]a_k]x^k=0$

$\therefore a_{k+2}=\frac{(k-n)(k+n+1)}{(k+2)(k+1)}a_k$, $k=0,1,2\cdots$

$$\begin{cases} a_{2m}=\frac{a_0}{(2m)!}(2m-2-n)(2m-4-n)\cdots(0-n)\cdot(2m-2+n+1)(2m-4+n+1)\cdots(0+n+1) \\ a_{2m+1}=\frac{a_1}{(2m+1)!}(2m-1-n)(2m-3-n)\cdots(1-n)\cdot(2m-1+n+1)(2m-3+n+1)\cdots(1+n+1). \end{cases}$$

奇数项与偶数项分别由 a_0 和 a_1 的取值确定

$$\left.\begin{cases} \text{取 } a_1=0,\ a_0\neq0,\ \text{得 } f_1(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_{2m}x^{2m} & \text{--- 偶函数} \\ \text{取 } a_1\neq0,\ a_0=0,\ \text{得 } f_2(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_{2m+1}x^{2m+1} & \text{--- 奇函数} \end{cases}\right\}\ \text{线性无关.}$$

1) n 不为整数，f_1、f_2 为无穷级数. $|x|<1$ 时由比值判敛法知两级数收敛，

$|x|=1$ 时两幂级数发散 (Raabe)，此时方程通解为 $y=c_1f_1+c_2f_2$.

2) n 为整数，n 为正偶数或负奇数时 f_1 是 $\frac{n}{2}$ 阶或 $-\frac{n+1}{2}$ 阶多项式，f_2 为无穷级数.

n 为正奇数或负偶数时 f_2 是 $\frac{n-1}{2}$ 阶或 $-\frac{n}{2}$ 阶多项式，f_1 为无穷级数.

无穷级数还是在 $|x|<1$ 时收敛，$|x|=1$ 时发散，此时方程通解 $y=c_1f_1+c_2f_2$.

记 n 为整数时的多项式为 $P_n(x)$，无穷级数为 $Q_n(x)$. 由于 n 为负实数的情况与 n 为正实数时一样：$n(n+1)=-n[-(n+1)]$. 不妨设 n 为正实数.

考虑 n 为正整数时的情况：

$\because a_{k+2}=\frac{(k-n)(k+n+1)}{(k+2)(k+1)}a_k$，$\therefore a_{n+2}=a_{n+4}=\cdots=0$.

$\therefore n$ 为偶数时 $k=0,2,\cdots,n-2$. $a_n=\frac{-2\cdot(2n-1)}{n(n-1)}\cdot\frac{-4\cdot(2n-3)}{(n-2)(n-3)}\cdots\cdots$

n 为奇数时 $k=1,3,\cdots,n-2$.

$\therefore a_k=-\frac{(k+2)(k+1)}{(n-k)(k+n+1)}a_{k+2}$ $k=n-2,n-4,n-6$. 取适当的 a_n 使 $P_n(x)$ 在 $x=1$ 处为 1. 正规化

得 $a_n=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$ $\therefore a_{n-2m}=(-1)^m\frac{(2n-2m)!}{2^nm!(n-m)!(n-2m)!}$ $(n\geq2m)$.

$\therefore$ Legendre 多项式 $P_n(x)=\sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^m\frac{(2n-2m)!}{2^nm!(n-m)!(n-2m)!}x^{n-2m}$.

$\therefore \mu = n(n+1)$ 在n有正整数解时 $f(x) = AP_n(x) + BQ_n(x)$.

即 $\Phi = AP_n(\cos\theta) + BQ_n(\cos\theta)$. 由自然条件

$\Phi = AP_n(\cos\theta)$.

$\therefore u_n = R(r)\Phi(\varphi)\cdot\Theta(\theta) = R_n(r)\Theta_n(\theta) = A_n r^n \cdot P_n(\cos\theta)$

由边界条件 $\sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta)\big|_{r=1} = f(\theta)$，即 $\sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos\theta) = f(\theta)$.

remark. $\begin{cases}\text{完备性} \\ \text{正交性}\end{cases}$ $\int_0^{\pi} P_n(\cos\theta) P_m(\cos\theta)\cdot d\cos\theta = \begin{cases} 0 & n\neq m \to \text{Sturm-Liouville} \\ \frac{2}{2n+1} & n=m \to \text{Rodrigues. 下证.}\end{cases}$

$\therefore A_n = \frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta$.

Legendre多项式的性质：

1) 由 $P_n(x) = \sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!} x^{n-2m}$. 易知 $P_{2n-1}(x)$ 是奇函数，P_{2n} 是偶函数

2) 由正规化，$P_n(1) = 1$， $P_n(-1) = (-1)^n$. 下证.

3) $|P_n(x)| \le 1$，$\forall |x| \le 1$，$n = 0, 1, 2 \cdots$ 下证.

4) $P_n(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上有 n 个相异零点.

5). $(n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x) = (2n+1)xP_n(x)$.

生成函数：$\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2tx}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n \quad |t|<1$

$\because \frac{1}{\sqrt{1+t^2-2tx}}$ $|t|<1$ $|x|<1$ 在区域 $|t|<1$ 内解析、无零点，

$\therefore$ 可Taylor展开 $\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2tx}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x) t^n \quad t\in\mathbb{C}, |t|<1$.

$C_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dt^n}\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2tx}}\Big|_{t=0} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|t|<1} \frac{(1+t^2-2tx)^{-\frac{1}{2}}}{t^{n+1}} dt$.

令 $(1+t^2-2tx)^{-\frac{1}{2}} = 1-tz$，$t = \frac{2(z-x)}{z^2-1}$，$dt = -2\frac{1-2xz+z^2}{(z^2-1)^2}dz$.

$\therefore C_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C'} \frac{(z^2-1)^n}{2^n(z-x)^{n+1}}$ C'是以上变换所得.

由Cauchy积分公式，$C_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n\Big|_{z=x} = \underline{\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n}$ Rodrigues

微分形式：$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k} =$

$\frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} x^{n-2k} =$

$\frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}(x^{2n-2k})$ $\because \forall k, [\frac{n}{2}] < k \le n$, $\frac{d^n}{dx^n}x^{2n-2k} = 0$

$\therefore P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{2n-2k}$

$= \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$.

由莱布尼兹公式，$\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = \frac{d^n}{dx^n}(x+1)^n(x-1)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i [(x+1)^n]^{(i)} [(x-1)^n]^{(n-i)}$.

当 $i=0$ 时第一项只含 $(x+1)^n$，当 $i=n$ 时最后一项只含 $(x-1)^n$，其余皆含 $(x+1)(x-1)$ 因子

故 $P_n(1) = \frac{1}{2^n n!} C_n^0 \cdot 2^n \cdot n! = 1$，$P_n(-1) = \frac{1}{2^n n!} C_n^n (-2)^n \cdot n! = (-1)^n$.

令生成函数中 $x=0$，得 $\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0) t^n = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{t^4}{2!} + \cdots + (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} t^{2k} + \cdots$

$\therefore P_{2n-1}(0) = 0$，$P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < 1$

利用一般积分式 $P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^n d\varphi$ 可证 $|P_n(x)| \le 1$.

△ $$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n dx$$

$$= -\frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^2-1)^n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n dx = \cdots$$

$$= (-1)^n \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}[(x^2-1)^n]\,(x^2-1)^n dx$$

$$= (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1} (x^2-1)^n dx$$

$$= (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}\theta\, d\theta = \frac{2}{2n+1}.$$

△ $\int_{-1}^{1} x^m P_n(x)\,dx$：

$m<n$ 时，由于在区间 $[-1,1]$ 上 x^m 可由 $\{P_l(x)\}$ $l=0,1,\cdots m$ 线性表出，而 $\int_{-1}^{1} P_l(x)P_n(x)\,dx = 0$ $\therefore I=0$.

$m\ge n$ 时，$I = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} x^m \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n dx = -\frac{m}{2^n n!}\int_{-1}^{1} x^{m-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n dx$

$$= \cdots = (-1)^n \frac{m!}{2^n n!(m-n)!}\int_{-1}^{1} x^{m-n}(x^2-1)^n dx.$$

四. 格林函数法

1. Dirac delta 函数.

1) 用 δ_n 序列逼近得 δ 函数，在积分意义下有定义.

矩形脉冲: $\delta_n(x)=\begin{cases}0 & x<-\frac{1}{2n} \\ n & -\frac{1}{2n}<x<\frac{1}{2n} \\ 0 & x>\frac{1}{2n}\end{cases}$

高斯脉冲: $\frac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2x^2}=\delta_n$.

采样脉冲: ……

$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1$.

$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x-\xi)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(\xi-x)dx=f(\xi)\quad\forall f\in C(\mathbb{R})$.

2)
$\int_{-\infty}^{+\infty}f'(x)H(x)dx=-\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x)dx=-f(0)\quad\forall f\in C_0^\infty(\mathbb{R})\Rightarrow$ 定义了 $H'(x)=\delta(x)$

$\int_{-\infty}^{+\infty}f''(x)G(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x)dx=f(0)\quad\forall f\in C_0^\infty(\mathbb{R})\Rightarrow$ 定义了 $G''(x)=\delta(x)$

$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta'(x)dx=-\int_{-\infty}^{+\infty}f'(x)\delta(x)dx=-f'(0)\quad\forall f\in C^1(\mathbb{R})\Rightarrow$ 定义了 $\delta'(x)$.

$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta''(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f''(x)\delta(x)dx=f''(0)\quad\forall f\in C^2(\mathbb{R})\Rightarrow$ 定义了 $\delta''(x)$

…… 皆在积分意义下定义.

3) $F[\delta(x)]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega x}\delta(x)dx=1$. ——— Fourier 变换

$L[\delta(x)]=\int_0^\infty e^{-px}\delta(x)dx=1$. ——— Laplace 变换.

4) $\delta(x-\xi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\quad x,\xi\in(-L,L)$ — Fourier 展开.

$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\delta(x-\xi)\cos\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{1}{L}\cos\frac{n\pi\xi}{L}\quad n=0,1,2\cdots$

$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\delta(x-\xi)\sin\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{1}{L}\sin\frac{n\pi\xi}{L}\quad n=1,2\cdots$

5) 高维 δ 函数: $\delta(\vec{x}-\vec{\xi})=\delta(x_1-\xi_1)\delta(x_2-\xi_2)\cdots\delta(x_n-\xi_n)$.

2. 一维第一类边值问题 (poisson 方程).

$\begin{cases}u''=f(x) & f\in C_0^\infty([0,1]). \\ u(0)=u(1)=0.\end{cases}$

其解为 $u(x)=\int_0^1 f(\xi)G(x;\xi)d\xi$，其中 $G(x;\xi)$ ~~$=\begin{cases}(\xi-1)x & 0\le x<\xi \\ \xi(x-1) & \xi\le x<1\end{cases}$~~ 为其 Green 函数

$\begin{cases}f(\xi)=\int_0^1 f(x)\delta(x-\xi)dx & : f(\xi) \text{ 点源的叠加: 场源} \\ G''(x;\xi)=\delta(x-\xi). & : G(x;\xi) \text{ 点源产生的场}\end{cases}$ 解得 $G(x;\xi)=\begin{cases}(\xi-1)x & 0\le x<\xi \\ \xi(x-1) & \xi\le x<1.\end{cases}$

验证: $\because G(0;\xi)=G(1;\xi)=f(0)=f(1)=0$

$\int_0^1 f(\xi)G(x;\xi)d\xi=\int_0^1 u''(\xi)G(x;\xi)d\xi=G(x;\xi)u'(\xi)\Big|_0^1-\int_0^1 u'G'd\xi=-G'u\Big|_0^1+\int_0^1 uG''d\xi$

$=\int_0^1 u(\xi)\delta(x-\xi)d\xi=u(x)$

$\frac{d^2}{dx^2}\left(\int_0^1 f(\xi)G(x;\xi)d\xi\right)=\int_0^1 f(\xi)\delta(x-\xi)d\xi=f(x)$.

3. 高维空间上的 Poisson 方程.

$$\begin{cases}\nabla_{\vec{x}}^2 u(\vec{x};\vec{\xi}) = f(\vec{x}) \\ \vec{x},\vec{\xi}\in\mathbb{R}^n\end{cases} \qquad f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

其解为 $u(\vec{x})=\int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{\xi})\,G(\vec{x};\vec{\xi})\,d\vec{\xi}$，其中 $G(\vec{x};\vec{\xi})$ 为其Green函数.

$$\begin{cases} f(\vec{\xi})=\int f(\vec{x})\,\delta(\vec{x}-\vec{\xi})\,d\vec{x} & : f(\vec{\xi}) \text{ 点源的叠加：场源} \\ \nabla_{\vec{x}}^2 G(\vec{x};\vec{\xi})=\delta(\vec{x}-\vec{\xi}) & : G(\vec{x};\vec{\xi}) \text{ 点源产生的场}\end{cases}$$

解得 $G(\vec{x};\vec{\xi})=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}\ln|\vec{x}-\vec{\xi}| & n=2 \\ \frac{1}{(2-n)\omega_n}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{\xi}|^{n-2}} & n\geq 3\end{cases}$

验证1：

$$\begin{cases}\int f(\vec{\xi})G(\vec{x};\vec{\xi})\,d\vec{\xi}=\int\nabla^2 u\cdot G(\vec{x};\vec{\xi})\,d\vec{\xi}=\cdots\int u(\vec{\xi})\,\nabla^2G(\vec{x};\vec{\xi})\,d\vec{\xi} \\ \qquad =\int u(\vec{\xi})\,\delta(\vec{x}-\vec{\xi})\,d\vec{\xi}=u(\vec{x}) \\ \nabla_{\vec{x}}^2\left(\int f(\vec{\xi})G(\vec{x};\vec{\xi})\,d\vec{\xi}\right)=\int f(\vec{\xi})\,\nabla_{\vec{x}}^2G(\vec{x};\vec{\xi})\,d\vec{\xi}=\int f(\vec{\xi})\,\delta(\vec{x}-\vec{\xi})\,d\vec{\xi}=f(\vec{x})\end{cases}$$

△ 验证2.1：

$\because \nabla_{\vec{x}}^2 G(\vec{x};\vec{\xi})=\delta(\vec{x}-\vec{\xi})$ $\quad\therefore \int_{B_r}\nabla_{\vec{x}}^2 G(\vec{x};\vec{\xi})\,dV_n=\int_{B_r}\delta(\vec{x}-\vec{\xi})\,dV_n=1.$

$\therefore \oint_{\partial B_r}\nabla G(\vec{x};\vec{\xi})\cdot d\vec{S}_n=\oint_{\partial B_r}\frac{\partial G(\vec{x};\vec{\xi})}{\partial r}\cdot dS_n=\oint_{\partial B_r}\frac{\partial G}{\partial r}r^{n-1}\cdot d\omega_n.$ G为点源产生的球对称场

$\therefore \omega_n r^{n-1}\frac{\partial G}{\partial r}=1$，$\frac{\partial G}{\partial r}=\frac{1}{\omega_n r^{n-1}}$

解得 $G(\vec{x};\vec{\xi})=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}\ln|\vec{x}-\vec{\xi}| & n=2 \\ \frac{1}{(2-n)\omega_n}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{\xi}|^{n-2}} & n\geq 3\end{cases}$ 基本解.

△ 验证2.2：

设 $\vec{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$. 则 $\frac{\partial}{\partial x_i}G=\frac{\partial}{\partial r}G\cdot\frac{\partial r}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial r}G\,\frac{x_i}{r}.$

$\therefore \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}G=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial G}{\partial r}\cdot\frac{x_i}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial x_i}=\cancel{\left[\frac{\partial^2 G}{\partial r^2}\frac{x_i}{r}+\frac{\partial G}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\right)^{-1}\right]\frac{x_i}{r}=G_{rr}+\frac{n-1}{r}G_r}$

$\quad=\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial G}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{x_i}{r}+\frac{\partial G}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{x_i}{r}=\frac{\partial^2 G}{\partial r^2}\frac{x_i^2}{r^2}+\frac{\partial G}{\partial r}\frac{r-\frac{x_i}{r}\cdot x_i}{r^2}=G_{rr}\frac{x_i^2}{r^2}+\frac{r^2-x_i^2}{r^3}G_r$

$\therefore \nabla_{\vec{x}}^2 G=G_{rr}\cdot\frac{r^2}{r^2}+G_r\left(\frac{nr^2-r^2}{r^3}\right)=G_{rr}+\frac{n-1}{r}G_r=\delta(\vec{x}-\vec{\xi})=\delta(r).$

令 $t=\ln r$，得 $\frac{1}{r^2}G_{tt}-\frac{1}{r^2}G_t+\frac{n-1}{r^2}G_t=\delta(r)$，即 $G_{tt}+(n-2)G_t=\delta(r)\,r^2=\delta(e^t)e^{2t}$

亦可解得 $G(\vec{x};\vec{\xi})=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}\ln|\vec{x}-\vec{\xi}| & n=2 \\ \frac{1}{(2-n)\omega_n}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{\xi}|^{n-2}} & n\geq 3\end{cases}$ 基本解.

4. 高维第一类边值问题(poisson方程)

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\vec{x}) = f(\vec{x}), & \vec{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi. \end{cases}$$

其解为 $\int_\Omega f(\vec{\xi}) G(\vec{x};\vec{\xi}) d\vec{\xi} + \oint_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial G}{\partial n} ds$，其中 $G(\vec{x};\vec{\xi})$ 为其Green函数，$G(\vec{x};\vec{\xi}) = G(\vec{\xi};\vec{x})$ 分部积分证之

证明：设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为非空有界开集，$\partial\Omega$ 光滑．$\forall u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$

$$\int_\Omega \nabla\cdot(v\nabla u) dV = \oint_{\partial\Omega} v \nabla u \, d\vec{s}$$

$$= \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u \, dV + \int_\Omega v \nabla^2 u \, dV \quad \therefore \int_\Omega v\nabla^2 u \, dV = \oint_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u \, dV.$$

同理 $\int_\Omega u \nabla^2 v \, dV = \oint_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} ds - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dV$ $\therefore \int_\Omega (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u) dV = \oint_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right) ds.$

· 设上式中 u 为待求解的 $u(\vec{x})$，v 为其Green函数 $G(\vec{x};\vec{\xi})$，则有．

$$\int_\Omega \left(u(\vec{x}) \nabla_{\vec{x}}^2 G(\vec{x};\vec{\xi}) - G(\vec{x};\vec{\xi}) f(\vec{x})\right) d\vec{x} = \oint_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n}\right) ds = \oint_{\partial\Omega} \left(\varphi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n}\right) ds$$

取 $G(\vec{x};\vec{\xi})$ 满足

$$\Delta \begin{cases} \nabla_{\vec{x}}^2 G(\vec{x};\vec{\xi}) = \delta(\vec{x} - \vec{\xi}) \\ G(\cdot;\vec{\xi})|_{\partial\Omega} = 0 \qquad \forall \vec{\xi} \in \Omega. \end{cases}$$

则 $u(\vec{x}) = \int_\Omega G(\vec{x};\vec{\xi}) f(\vec{\xi}) d\vec{\xi} + \oint_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial G}{\partial n} ds$．其中用到对称性 $G(\vec{x};\vec{\xi}) = G(\vec{\xi};\vec{x})$

① 镜像法．

欲求解 $\begin{cases} \nabla^2 G(\vec{x};\vec{\xi}) = \delta(\vec{x} - \vec{\xi}) \\ G(\cdot;\vec{\xi})|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$

可设 $G(\vec{x};\vec{\xi}) = G_0(\vec{x};\vec{\xi}) + v(\vec{x};\vec{\xi})$，其中 $G_0(\vec{x};\vec{\xi})$ 为整空间上的Green函数

$$G_0(\vec{x};\vec{\xi}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln|\vec{x} - \vec{\xi}| & n=2 \\ \frac{1}{(2-n)\omega_n} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{\xi}|^{n-2}} & n \geq 3. \end{cases}$$

因其已满足 $\nabla^2 G_0(\vec{x};\vec{\xi}) = \delta(\vec{x}-\vec{\xi})$，故需 $v(\vec{x};\vec{\xi})$ 满足

$$\begin{cases} \nabla_{\vec{x}}^2 v(\vec{x};\vec{\xi}) = 0 & \vec{x}, \vec{\xi} \in \Omega \\ v(\cdot;\vec{\xi})|_{\partial\Omega} = -G_0(\cdot;\vec{\xi})|_{\partial\Omega}. & \vec{\xi} \in \Omega. \end{cases}$$

eg1：三维半空间 $\mathbb{R}_+^3$：$v(\vec{x};\vec{\xi}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{\eta}|}$，$\vec{x} \in \mathbb{R}_+^3$，$\vec{\eta}$ 是 $\vec{\xi}$ 的对称点．

$$\therefore G(\vec{x};\vec{\xi}) = -\frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{\xi}|} + \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{\eta}|}, \quad \forall \vec{\xi} \in \mathbb{R}_+^3$$

eg2：三维球形域：$v(\vec{x};\vec{\xi}) = \frac{R}{4\pi|\vec{\xi}|} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{\eta}|}$，$\vec{x} \in B_R^3$，$|\vec{\eta}||\vec{\xi}| = R^2$，$\vec{\eta}$ 是 $\vec{\xi}$ 关于 ∂B_R^3 反演点．

$$\therefore G(\vec{x};\vec{\xi}) = -\frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{\xi}|} + \frac{R}{4\pi|\vec{\xi}|} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{\eta}|}, \quad \forall \vec{\xi} \in B_R^3.$$

② Fourier展开法

欲解 $\begin{cases} \nabla^2 G(\vec{x};\vec{\xi}) = \delta(\vec{x}-\vec{\xi}) \\ G(\cdot;\vec{\xi})|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$

将G和δ按本征函数展开（∀满足边界条件的完备正交系）.

eg: 矩形域 $[0,L]\times[0,M]$：特征函数 $\varphi_{mn} = \sin\frac{m\pi x_1}{L}\sin\frac{n\pi x_2}{M}$ $(m,n=1,2,\cdots)$.

是满足 $G(\cdot;\vec{\xi})|_{\partial\Omega}=0$ 的一族特征函数. $G=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\hat{G}_{mn}\sin\frac{m\pi x_1}{L}\sin\frac{n\pi x_2}{M}$.

$\delta(\vec{x}-\vec{\xi}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{mn}\sin\frac{m\pi x_1}{L}\sin\frac{n\pi x_2}{M}$，其中，

$a_{mn} = \frac{4}{ML}\int_0^M\int_0^L \delta(\vec{x}-\vec{\xi})\sin\frac{m\pi x_1}{L}\sin\frac{n\pi x_2}{M}\,dx_1 dx_2 = \frac{4}{ML}\sin\frac{m\pi\xi_1}{L}\sin\frac{n\pi\xi_2}{M}$.

$\nabla^2 G = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\left\{-\left[\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{M}\right)^2\right]\hat{G}_{mn}\right\}\sin\frac{m\pi x_1}{L}\sin\frac{n\pi x_2}{M}$.

$\therefore \hat{G}_{mn} = -\frac{4}{LM}\left[\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{M}\right)^2\right]^{-1}$.

$\therefore G = -\frac{4}{LM}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\left[\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{M}\right)^2\right]^{-1}\sin\frac{m\pi x_1}{L}\sin\frac{n\pi x_2}{M}$.

5. 热传导方程的Green函数.

$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & -\infty<x<\infty,\ t>0 \\ u(x,0)=\varphi(x) & -\infty<x<\infty \end{cases}$ 的Green函数 $\begin{cases} H_t(x,t;\xi) = a^2 H_{xx}(x,t;\xi) & x,\xi\in\mathbb{R},\ t>0 \\ H(x,0;\xi) = \delta(x-\xi). & x,\xi\in\mathbb{R}. \end{cases}$

u的解为 $u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x-\xi,t;\xi)\varphi(\xi)\,d\xi$.

$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}+f & -\infty<x<\infty,\ t>0 \\ u(x,0)=\varphi(x) & -\infty<x<\infty \end{cases}$ 的Green函数 $\begin{cases} H_t(x,t;\xi) = a^2 H_{xx}(x,t;\xi) \\ H(x,0;\xi) = \delta(x-\xi). \end{cases}$

u的解为：$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x-\xi,t;\xi)\varphi(\xi)\,d\xi + \int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty} H(x,t-\tau;\xi)f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau$.

高维情形的Green函数类似，常用Fourier展开法求 $H(x,t;\xi)$.

高维第一类初边值问题：

$\begin{cases} u_t = a^2\nabla^2 u & \vec{x}\in\Omega,\ t>0. \\ u(\cdot,t)|_{\partial\Omega}=0 & t>0 \\ u|_{t=0}=\varphi(\vec{x}) & \vec{x}\in\Omega \end{cases}$ 的Green函数 $\begin{cases} H_t(\vec{x},t;\vec{\xi}) = a^2\nabla_{\vec{x}}^2 H(\vec{x},t;\vec{\xi}) & \vec{x},\vec{\xi}\in\Omega,\ t>0 \\ H(\cdot,t;\vec{\xi})|_{\partial\Omega}=0 & \vec{\xi}\in\Omega,\ t>0 \\ H|_{t=0}=\delta(\vec{x}-\vec{\xi}) & \vec{x},\vec{\xi}\in\Omega. \end{cases}$

波动方程的Green函数~~基本解~~定义类似.